群同変性分岐理論を用いたヘルフリッヒ変分問題の安定性解析

Stability analysis of the Helfrich variational problem
using the equivariant bifurcation theory

長澤 壯之　（理工学研究科・教授）
Takeyuki Nagasawa
(Graduate School of Science & Engineering, Professor)

１．研究の概要

ヘルフリッヒ変分問題は、ヒトの赤血球の形態変換を記述するモデルとして、1970 年代にヘルフリッヒら ([1, 3]) によって提唱された。これは、変形ウィルモア汎関数に対する制限付極値問題として定式化される。変形ウィルモア汎関数とは、曲面の平均曲率と自発性曲率の差の平方をその曲面上で積分したものである。与える制限は、赤血球膜を表す曲面の面積と、それが囲む領域の体積の指定である。これをラグランジュの未定乗数法を用いて微分方程式として書き下すと、

$$\varDelta_\Sigma H + 2H(H^2 - K) + 2c_0 K - 2\left(c_0^2 + \lambda_1\right) H - \lambda_2 = 0$$

となる。ここで $\varDelta_\Sigma$ は、未知曲面 Σ の Laplace-Beltrami 作用素、H は平均曲率、K は Gauss 曲率、c_0 は赤血球膜の特性を表す自発性曲率、λ_1, λ_2 は Lagrange の未定乗数である。H や K は、未知曲面を表す関数の 2 階までの導関数を用いて表され、Laplace-Beltrami 作用素は、未知曲面の形状より定まる 2 階楕円型偏微分作用素である。従って、上の方程式は複雑な 4 階の非線形楕円型偏微分方程式となり、数学的な厳密な解析は非常に困難である。

変分問題の解として安定なものは、その形状に何らかの対称性を持っていることが予想される。数学的に言えば、ある群の作用に関する同変性を持っていると考えられるのである。群同変性分岐理論とは、解に群同変性を仮定して、問題を解析するのに用いられる理論である。、同変性を仮定する事により、解析を行う関数空間が絞られ、方程式を簡略化する事が出来る。しかしながら、群同変性を持たない解の有無も当然問題としなければならない。

２．研究組織

本研究は、本学の３名の教員により、以下のような役割分担によって遂行された。

長澤壯之	（理学部・教授）	研究の総括及びヘルフリッヒ変分問題の総合的研究（[4, 8]）
小池茂昭	（理学部・教授）	粘性解の研究（[5]）
太田雅人	（理学部・助教授）	非線形発展方程式論の研究（[2, 6, 10]）

３．研究成果

従来、群同変性理論では、equivatiant branching lemma と呼ばれる方法があった。これは、群同変性を持つ問題にほぼ共通して用いられる強力な方法であるが、すべての解を求められる訳ではない。1990 年代頃から、この方法では得られない解が存在するのか問題視されるようになり、そのような解の例も知られるところとなった。昨年の研究では、この方法とは別の方法を開拓し、モード 2 と 4 の解を得る事が出来た。ここでは、モードの定義は割愛する（[9] 参照）。モード 2 と 4 の解は、すべて equivariant branching lemma を用いても得られるが、これら以外には解が存在しない事が示された。モード 6 と 8 については部分的な結果のみ得られていた。本年度は、方法を改良し、モード 6 と 8 の解（の恐らく全て）を得る事が出来た。これらの中には、equivariant branching lemma では得られない解もある（モード 6 の非軸対称解 (3), モード 8 の非軸対称解 (2), (3)）。モード 6 と 8 の解は、本研究で求められたものに尽きると予想されるが、未解決である。モード 6 と 8 の解を図示する（モード 2 と 4 については、[7] に記載）。

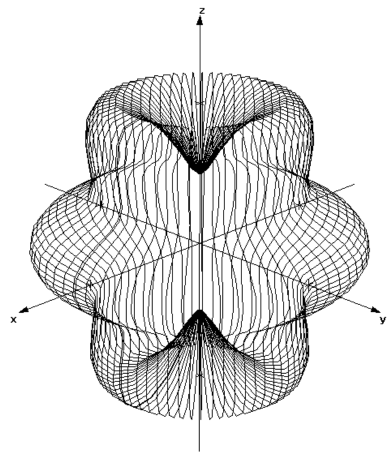

図 1: モード 6 の軸対称解

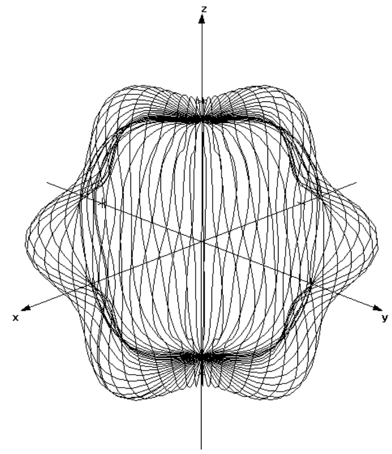

図 2: モード 6 の非軸対称解 (1)

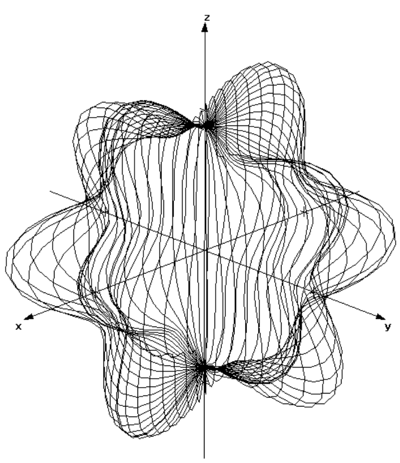

図 3: モード 6 の非軸対称解 (2)

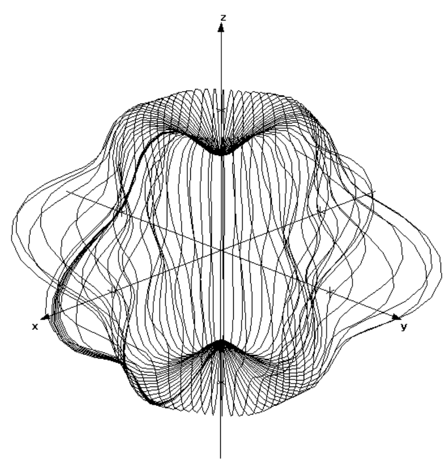

図 4: モード 6 の非軸対称解 (3)

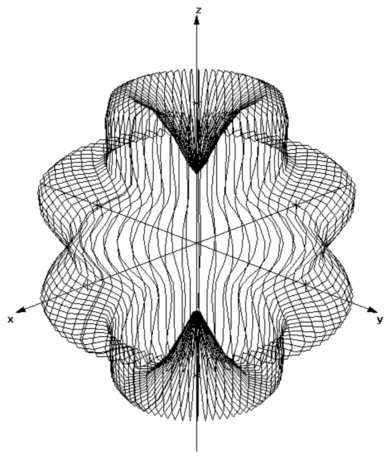

図 5: モード 8 の軸対称解

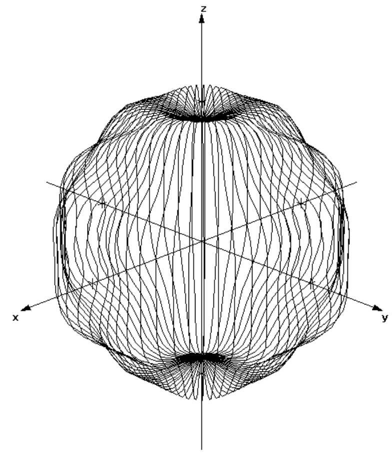

図 6: モード 8 の非軸対称解 (1)

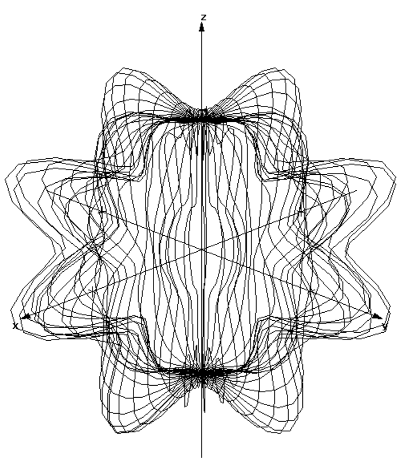

図 7: モード 8 の非軸対称解 (2)

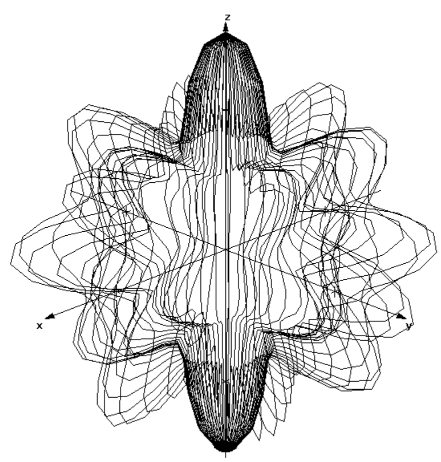

図 8: モード 8 の非軸対称解 (3)

また、変分問題の解を解析する手段として、勾配流の方法がある。室蘭工業大学の高坂良史との共同研究の成果が、公表された ([4])。

４．研究集会の企画

また、昨年に引き続き、「曲面と曲線の非線型解析」という研究集会を企画し、その運営に本研究費の一部を使用した。研究集会では、本研究やそれに関連した最新の成果に関する 10 の講演があった。それらに基づき、討論、研究連絡が行われ、本研究に大きく寄与する事となった。開催場所・日時・講演等は、以下の通りである。

日時 2005 年 12 月 19〜21 日

場所 埼玉大学大宮ソニックシティカレッジ

講演 池田 幸太（東北大理） Gierer-Meinhardt 方程式のストライプパターンの不安定性
山崎 崇史（金沢大理） 体積保存の双曲型自由境界値問題とその数値計算
小磯 憲史（大阪大理） 太さを持つ弾性曲線の運動について
新田 洋平（埼玉大理） 複素空間型に於ける複素部分多様体の法曲率テンソルに関する変分問題
大久保 貴章（埼玉大理） CR Einstein-Weyl 構造について
岡安 隆 (茨城大教育） スカラー曲率一定な完備超曲面の構成
小磯 深幸 (奈良女子大理) Anisotropic capillary surfaces with wetting energy
梅原 雅顕（大阪大理） 波面の幾何学
高橋 太（大阪市立大理） 剰余項のついた写像の等周不等式について
浦川 肇（東北大理） Computer visions of the problems of the Laplacian on embedded surfaces

参考文献

[1] E. A. Evans, *Bending resistance and chemically induced moments in membrane bilayers*, Biophys. J. **14** (1974), 923–931.

[2] Fukuizumi, R. & M. Ohta, *Instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities*, J. Math. Kyoto Univ. **45** (1) (2005), 145–158

[3] W. Helfrich, *Elastic properties of lipid bilayers: Theory and possible experiments*, Z. Naturforsch **28c** (1973), 693–703.

[4] Kohsaka, Y. & T. Nagasawa, *On the existence of solutions of the Helfrich flow and its center manifold near spheres*, Differential Integral Equations **19** (2) (2006), 121–142.

[5] Koike, S. & H. Morimoto, *Optimal consumption and portfolio choice with stopping*, Funkcialaj Ekvacioj **48** (2) (2005), 183–202.

[6] Kubo, H. & M. Ohta, *On systems of semilinear wave equations with unequal propagation speeds in three space dimensions*, Funkcial. Ekvac. **48** (2) (2005), 65–98.

[7] 長澤 壯之, 群同変性分岐理論を用いた幾何学的変分問題の安定性解析, 総合研究機構研究プロジェクト研究成果報告書, 161–164, 埼玉大学総合研究機構, 2005.

[8] 長澤 壯之, Helfrich 変分問題の非軸対称解, 研究集会「曲面と曲線の変分問題と発展方程式」報告集, 小磯 憲史 編, 56–65, 大阪大学, 2005.

[9] Nagasawa, T. & I. Takagi, *Bifurcating critical points of bending energy with constraints related to the shape of red blood cells*, Calc. Var. Partial Differential Equations **16** (1) (2003), 63–111.

[10] Ohta, M. & G. Todorova, *Strong instability of standing waves for nonlinear Klein-Gordon equations*, Discrete and Contin. Dyn. Syst. **12** (2) (2005), 315–322.