

粘性解理論とその応用 Viscosity Solution Theory and its Applications

プロジェクト代表者：小池 茂昭（理学部・教授）

Project leader : Shigeaki Koike (Faculty of Science・Professor)

1. A. Swiech（ジョージア工科大学・教授）との国際共同研究

2004年12月13日から25日まで、Swiech教授を招聘し、下記のように共同研究を行った。

(A) 臨界非線形項を持つ方程式の L^p 粘性解の最大値原理 完全非線形一様楕円型方程式の適切な「弱解」である L^p 粘性解は、通常の粘性解の拡張概念として Caffarelli-Crandall-Kocan-Swiechにより1996年に導入され、その存在・一意性・微分可能性・安定性等が Swiech を中心に研究されてきた。

今回の共同研究の一つは、2005年に出版された Koike-Swiech の研究の延長線上にある。即ち、今までの共同研究では、確率論における大偏差原理や数理ファイナンスにおける危険鋭敏的最適制御に現れる方程式で、1階微分に関する2次の増大度を持つ非線形項がある臨界非線形の場合に、 L^p 粘性解の最大値原理・連続性・存在定理を扱った。

今回は、更に臨界非線形項に非有界係数を伴った偏微分方程式の L^p 粘性解の最大値原理に関する結果を得た。ただし、連続性の評価に関しては、前論文の巧妙な変数変換の方法が使えないため、未解決である。

(B) L^p 粘性解の微分可能性 (A) では、臨界非線形の場合を扱ったが、もう一つの共同研究では、通常の完全非線形方程式ではあるが、微分幾何学で現れる準線形性を含む場合に、 L^p 粘性解の微分可能性（詳しくは、 $C^{1,\alpha}$ 評価）の研究を開始した。

Caffarelli や Swiech の縮尺法による研究方法や Trudinger による「強解」に対する積分評価の方法が全く通用しないことを単純な場合に検証した。

一方、2005年7月に中国の研究者達による微分可能性に関する目覚ましい結果がプレプリントとして世界的に評判を呼んでいるが、未だに誰も証明を検証できていない。現在は、この未確認の結果の検証し、我々の研究目的に有効であるかどうかを確認中である。

(C) 数理ファイナンスへの粘性解理論の応用 Swiech 教授の研究対象のもう一つの重要なものに粘性解理論の数理ファイナンスへの応用がある。特に、無限次元の解析を主に研究している。

一方、Koike-Morimoto（愛媛大学理学部・教授）は、現在まで数理ファイナンスに現れる最適制御問題で特に最適停止時刻問題について幾つかの研究をしてきた。

ここでは、Swiech 教授のアドバイスを得て、（有限次元ではあるが）数理ファイナンスに現れる、ある種の非線形方程式に関する粘性解の微分可能性を求めることで、最適ポリシーの構成をした。現在は、この方向で更に強い非線形性を持った問題の研究を進めている。

2. 本学における研究組織の活動

長澤教授・太田助教授（埼玉大学理学部）とは、毎週、粘性解理論の応用に関し研究打ち合わせを行っている。

具体的内容の一つは、距離関数の特異点の「大きさ・小ささ」を測る方法の研究であり、これはeikonal方程式の微分幾何学的解析が必須である。もう一つは、ある種のエネルギーの特異極限（これが粘性解になる）に関する問題で最適質量移動問題に現れ、変分法的解析を用いる。

3. 研究結果

S. KOIKE & H. MORIMOTO, Optimal consumption and portfolio choice with stopping, *Funkcialaj Ekvacioj*, 48 卷 (2005 年), pp.183-202.